Bemerkungen über die Integration linearer Differentialgleichungen mit Coëfficienten, die bezüglich der unabhängig Variablen von der ersten Potenz sind.

Von **Simon Spitzer.**

(Vorgetragen in der Sitzung am 7. October 1857.)

In unserem ersten Memoire, das wir unter dem Titel: „Integration der Differentialgleichung":

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

in den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften im Mai d. J. veröffentlichten, haben wir mehrere Differentialgleichungen, die specielle Fälle folgender Gleichung sind:

$$(a_3 + b_3 x) y''' + (a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

nicht in geschlossener Form zu integriren vermocht; wir wollen nun durch diesen Aufsatz einige Lücken des erwähnten Memoires ausfüllen, und zu gleicher Zeit die Integration mehrerer anderer Differentialgleichungen, die sich auf solche von der eben besprochenen Form zurückführen lassen, hier anfügen.

Integration der Gleichung

$$(1) \qquad x y'' + a y' + b y = F(x).$$

Die Integration dieser Gleichung gelang uns vollkommen, wir wollen jedoch dieselbe hier auf eine directe Weise vollführen, und nicht, wie wir es in unserem ersten Memoire thaten, durch ein glückliches Errathen der Form des Genüge leistenden Ausdruckes.

Differentiirt man nämlich die Gleichung (1) μ mal, so erhält man:

$$(2) \qquad x y^{(\mu+2)} + (\mu + a) y^{(\mu+1)} + b y^{(\mu)} = F^{(\mu)}(x)$$

und setzt man in dieselbe:

$$y^{(\mu)} = z$$

und führt statt x eine neue, unabhängig Variable ξ ein, so dass:

$$\xi = \sqrt{x}$$

ist, so hat man, da

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\xi}\frac{dz}{d\xi}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{1}{4\xi^3}\frac{dz}{d\xi} + \frac{1}{4\xi^2}\frac{d^2 z}{d\xi^2}$$

ist, für die Gleichung (2) folgende andere:

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}(\mu + a - \tfrac{1}{2})\frac{dz}{d\xi} + 4bz = \varphi(\xi)$$

wenn man nämlich das Resultat der Substitution von $x = \xi^2$ in $4F^{(\mu)}(x)$ durch $\varphi(\xi)$ bezeichnet. Eine Vereinfachung ergibt sich nun für:

$$\mu + a = \frac{1}{2},$$

man hat nämlich dann:

$$(3) \qquad \frac{d^2 z}{d\xi^2} + 4bz = \varphi(\xi).$$

Um nun diese zu integriren, betrachtet man in der Regel zuerst die reducirte Gleichung:

$$(4) \qquad \frac{d^2 z}{d\xi^2} + 4bz = 0$$

und erhebt sich dann, mittelst der Methode der Variation der willkürlichen Constanten, von dem Integrale der reducirten Gleichung zum Integrale der completen.

Der reducirten Gleichung (4) genügt man für:

$$z = A\, e^{+2\xi\sqrt{-b}} + B\, e^{-2\xi\sqrt{-b}}$$

unter A und B willkürliche Constante verstanden, der completen (3) genügt man durch denselben Ausdruck, nur sind dann A und B nicht mehr Constante, sondern Functionen von ξ, die aus folgenden Gleichungen zu bestimmen sind:

$$\frac{dA}{d\xi}e^{2\xi\sqrt{-b}}+\frac{dB}{d\xi}e^{-2\xi\sqrt{-b}}=0$$

$$\frac{dA}{d\xi}e^{2\xi\sqrt{-b}}-\frac{dB}{d\xi}e^{-2\xi\sqrt{-b}}=\frac{1}{2\sqrt{-b}}\varphi(\xi)$$

und für y ergibt sich somit:

$$(5)\qquad y=\frac{d^{a-\frac{1}{2}}}{dx^{a-\frac{1}{2}}}\left[A\,e^{+2\sqrt{-bx}}+B\,e^{-2\sqrt{-bx}}\right].$$

Integration der Gleichung

$$(6)\qquad x\,y'''+a\,y''\pm b\,y=F(x).$$

Diese Gleichung, von welcher die Gleichung:

$$x\,y'''-y=0$$

deren Integration in geschlossener Form uns bisher so viel Schwierigkeiten bereitete, ein specieller Fall ist, lässt sich auf eine ganz ähnliche Weise bewältigen, wie die eben behandelte.

Differentiirt man dieselbe μ mal, so erhält man:

$$x\,y^{(\mu+3)}+(\mu+a)\,y^{(\mu+2)}\pm b\,y^{(\mu)}=F^{(\mu)}(x)$$

und setzt man:

$$y^{(\mu)}=z,$$

ferner:

$$\sqrt{x}=\xi$$

und nimmt Rücksicht auf die Gleichungen:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\xi}\frac{dz}{d\xi}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{1}{4\xi^3}\frac{dz}{d\xi}+\frac{1}{4\xi^2}\frac{d^2z}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3z}{dx^3}=\frac{3}{8\xi^5}\frac{dz}{d\xi}-\frac{3}{8\xi^4}\frac{d^2z}{d\xi^2}+\frac{1}{8\xi^3}\frac{d^3z}{d\xi^3}$$

vermöge welcher die Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$ in Differentialquotienten von z bezüglich ξ umgesetzt werden, so erhält man:

$$\frac{d^3z}{d\xi^3}+\frac{2}{\xi}(\mu+a-\tfrac{3}{2})\frac{d^2z}{d\xi^2}-\frac{2}{\xi^2}(\mu+a-\tfrac{3}{2})\frac{dz}{d\xi}\pm 8\,b\,\xi\,z=\varphi(\xi)$$

wenn man unter $\varphi(\xi)$ diejenige Function von ξ versteht, die man erhält, wenn man in $8\sqrt{x}\,F^{(\mu)}(x)$ statt x, ξ^2 setzt.

Diese Gleichung wird wesentlich vereinfacht, wenn man:

$$a+\mu=\frac{3}{2}$$

setzt, denn man erhält dann:

$$\frac{d^3z}{d\xi^3}\pm 8b\,\xi z=\varphi(\xi) \tag{7}$$

und ihre Integration erfordert wieder vorerst die Integration der reducirten Gleichung:

$$\frac{d^3z}{d\xi^3}\pm 8b\,\xi z=0.$$

Man hat nämlich hiefür (siehe Petzval's Integration der linearen Differentialgleichungen I. Band, pag. 55)

$$z=\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{32b}}\left[B_1\,e^{\mu_1 u\xi}+B_2\,e^{\mu_2 u\xi}+B_3\,e^{\mu_3 u\xi}+B_4\,e^{\mu_4 u\xi}\right]du, \tag{8}$$

wo $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3\ \mu_4$ die Wurzeln der Gleichung

$$\mu^4+1=0 \text{ oder } \mu^4-1=0$$

bedeuten, je nachdem nämlich:

$$\frac{d^3z}{d\xi^3}+8b\,\xi z=0 \text{ oder } \frac{d^3z}{d\xi^3}-8b\,\xi z=0$$

die zu integrirende Gleichung ist, und wo $B_1\ B_2\ B_3\ B_4$ willkürliche, blos durch die Gleichung:

$$\frac{B_1}{\mu_1}+\frac{B_2}{\mu_2}+\frac{B_3}{\mu_3}+\frac{B_4}{\mu_4}=0 \tag{9}$$

verknüpfte Constante sind. Erhebt man sich nun von dem Integrale der reducirten Gleichung zu dem Integrale der completen, so kann man den Ausdruck (8) auch als das Integrale der completen Gleichung ansehen, nur sind dann B_1, B_2, B_3, B_4 nicht mehr als Constante, sondern als Functionen von ξ zu betrachten, zwischen denen nebst der Gleichung (9) noch folgende Gleichungen stattfinden:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{32b}}\left[\frac{dB_1}{d\xi}e^{\mu_1 u\xi}+\frac{dB_2}{d\xi}e^{\mu_2 u\xi}+\frac{dB_3}{d\xi}e^{\mu_3 u\xi}+\frac{dB_4}{d\xi}e^{\mu_4 u\xi}\right]du=0$$

$$\int_0^\infty u e^{-\frac{u^4}{32b}}\left[\mu_1\frac{dB_1}{d\xi}e^{\mu_1 u\xi}+\mu_2\frac{dB_2}{d\xi}e^{\mu_2 u\xi}+\mu_3\frac{dB_3}{d\xi}e^{\mu_3 u\xi}+\mu_4\frac{dB_4}{d\xi}e^{\mu_4 u\xi}\right]du=0$$

$$\int_0^\infty u^2 e^{-\frac{u^4}{32b}}\left[\mu_1{}^2\frac{dB_1}{d\xi}e^{\mu_1 u\xi}+\mu_2{}^2\frac{dB_2}{d\xi}e^{\mu_2 u\xi}+\mu_3{}^2\frac{dB_3}{d\xi}e^{\mu_3 u\xi}+\right.$$
$$\left.+\mu_4{}^2\frac{dB_4}{d\xi}e^{\mu_4 u\xi}\right]du=\varphi(\xi);$$

für y ergibt sich somit folgender Werth:

$$y=\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{32b}}\frac{d^{a-\frac{3}{2}}}{dx^{a-\frac{3}{2}}}\left[B_1 e^{\mu_1 u\sqrt{x}}+B_2 e^{\mu_2 u\sqrt{x}}+B_3 e^{\mu_3 u\sqrt{x}}+B_4 e^{\mu_4 u\sqrt{x}}\right]du.$$

Integration der Gleichung

$$xy'''+ay''+by'+cy=F(x).$$

Genau so, wie wir die vorhergehende Gleichung integrirten, lässt sich auch diese integriren. Ein μ maliges Differentiiren derselben gibt nämlich:

$$xy^{(\mu+3)}+(\mu+a)y^{(\mu+2)}+by^{(\mu+1)}+cy^{(\mu)}=F^{(\mu)}(x)$$

und setzen wir wieder:

$$y^{(\mu)}=z$$
$$\sqrt{x}=\xi,$$

so erhalten wir:

$$\frac{d^3z}{d\xi^3}+\frac{2}{\xi}\left(\mu+a-\frac{3}{2}\right)\frac{d^2z}{d\xi^2}-\frac{2}{\xi^2}\left(\mu+a-\frac{3}{2}-2b\xi^2\right)\frac{dz}{d\xi}+8c\xi z=\varphi(\xi)$$

wenn man wieder unter $\varphi(\xi)$ diejenige Function von ξ versteht, die man erhält, wenn man in $8\sqrt{x}\,F^{(\mu)}(x)$ statt x, ξ^2 setzt, und welche sich vereinfacht für:

$$\mu+a=\frac{3}{2},$$

denn wir haben dadurch:

$$\frac{d^3z}{d\xi^3}+4b\frac{dz}{d\xi}+8c\xi z=\varphi(\xi)$$

und dies ist, falls sie reducirt wird, eine jener Gleichungen, deren Integrale Petzval nach der Laplace'schen Methode im 1. Bd. seines oftgenannten Werkes pag. 56 bestimmte.

Liouville hat im Journal de l'école polytechnique, tom. XV. folgende 4 merkwürdige Formeln aufgestellt:

$$(A)\qquad \frac{d^\mu y}{d(\sqrt{x})^\mu} = 2^\mu \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}}}{dx^{\frac{\mu-1}{2}}}\left[x^{\frac{\mu}{2}} \frac{d^{\frac{\mu+1}{2}} y}{dx^{\frac{\mu+1}{2}}}\right]$$

$$(B)\qquad \frac{d^\mu y}{d(\sqrt{x})^\mu} = 2^\mu \sqrt{x} \frac{d^{\frac{\mu}{2}}}{dx^{\frac{\mu}{2}}}\left[x^{\frac{\mu-1}{2}} \frac{d^{\frac{\mu}{2}} y}{dx^{\frac{\mu}{2}}}\right]$$

$$(C)\qquad \frac{d^\mu y}{d(\sqrt{x})^\mu} = 2^\mu \sqrt{x} \frac{d^{\frac{\mu+1}{2}}}{dx^{\frac{\mu+1}{2}}}\left[x^{\frac{\mu}{2}} \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}}}{dx^{\frac{\mu-1}{2}}}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)\right]$$

$$(D)\qquad \frac{d^\mu y}{d(\sqrt{x})^\mu} = 2^\mu \frac{d^{\frac{\mu}{2}}}{dx^{\frac{\mu}{2}}}\left[x^{\frac{\mu+1}{2}} \frac{d^{\frac{\mu}{2}}}{dx^{\frac{\mu}{2}}}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)\right]$$

und namentlich hievon Gebrauch gemacht bei Gelegenheit der Integration der Gleichung:

$$x^{\frac{\mu}{2}} \frac{d^\mu z}{dx^\mu} + hz = F(x).$$

Er setzt nämlich:

$$z = \frac{d^{\frac{1-\mu}{2}} y}{dx^{\frac{1-\mu}{2}}}$$

und erhält dadurch:

$$x^{\frac{\mu}{2}} \frac{d^{\frac{1+\mu}{2}} y}{dx^{\frac{1+\mu}{2}}} + h \frac{d^{\frac{1-\mu}{2}} y}{dx^{\frac{1-\mu}{2}}} = F(x)$$

welche $\frac{\mu-1}{2}$ mal differentiirt, zu folgender Gleichung führt:

$$\frac{d^{\frac{\mu-1}{2}}}{dx^{\frac{\mu-1}{2}}}\left[x^{\frac{\mu}{2}}\frac{d^{\frac{\mu+1}{2}}y}{dx^{\frac{\mu+1}{2}}}\right]+hy=\frac{d^{\frac{\mu-1}{2}}F(x)}{dx^{\frac{\mu-1}{2}}}$$

und sich nach Anwendung der Formel (A) auch so schreiben lässt:

$$\frac{1}{2^\mu}\frac{d^\mu y}{d(\sqrt{x})^\mu}+hy=\frac{d^{\frac{\mu-1}{2}}F(x)}{dx^{\frac{\mu-1}{2}}}$$

Diese Gleichung geht für:

$$\sqrt{x}=\xi$$

$$2^\mu\frac{d^{\frac{\mu-1}{2}}F(x)}{dx^{\frac{\mu-1}{2}}}=\varphi(\xi)$$

über in:

$$\frac{d^\mu y}{d\xi^\mu}+2^\mu hy=\varphi(\xi)$$

welche Gleichung, da sie constante Coëfficienten hat, zu den leicht integrirbaren gehört.

Wir wollen nun noch andere Anwendungen der Liouville'schen Formeln machen.

Integration der Gleichung

(10) $$x^{\frac{\mu-1}{2}}z^{(\mu)}+hz=F(x).$$

Wir setzen:

$$z=\frac{d^{-\frac{\mu}{2}}y}{dx^{-\frac{\mu}{2}}}.$$

und erhalten dadurch:

$$x^{\frac{\mu-1}{2}}\frac{d^{\frac{\mu}{2}}y}{dy^{\frac{\mu}{2}}}+h\frac{d^{-\frac{\mu}{2}}y}{dx^{-\frac{\mu}{2}}}=F(x)$$

Wird diese Gleichung $\frac{\mu}{2}$-mal differentiirt, so kömmt man zu folgender Gleichung:

$$\frac{d^{\frac{\mu}{2}}}{dx^{\frac{\mu}{2}}}\left[x^{\frac{\mu-1}{2}}\frac{d^{\frac{\mu}{2}}y}{dx^{\frac{\mu}{2}}}\right]+hy=\frac{d^{\frac{\mu}{2}}F(x)}{dx^{\frac{\mu}{2}}}$$

welche sich, vermöge der Gleichung (B) auch so schreiben lässt:

$$\frac{1}{2^{\mu}\sqrt{x}}\,\frac{d^{\mu}y}{d(\sqrt{x})^{\mu}}+hy=\frac{d^{\frac{\mu}{2}}F(x)}{dx^{\frac{\mu}{2}}}$$

Setzt man nun:

$$\sqrt{x}=\xi$$

$$2^{\mu}\sqrt{x}\,\frac{d^{\frac{\mu}{2}}F(x)}{dx^{\frac{\mu}{2}}}=\varphi(\xi),$$

so erhält man:

$$\frac{d^{\mu}y}{d\xi^{\mu}}+2^{\mu}h\xi y=\varphi(\xi),$$

welche Gleichung bekanntlich für ganze pos. Werthe von μ und für $\varphi(\xi)=0$ in die von Scherk (siehe Crelle's Journal 10. Bd.) betrachtete übergeht, welche sich aber am schnellsten, wie es Lobatto und Petzval gezeigt, mittelst der Laplace'schen Methode behandeln lässt.

Integration der Gleichung

$$(11)\qquad x^{\frac{\mu+1}{2}}z^{(\mu)}+hz=F(x).$$

Auch diese Gleichung können wir auf eine einfache, leicht zu integrirende zurückführen.

Setzen wir nämlich:

$$z=\frac{d^{-\frac{\mu}{2}}}{dx^{-\frac{\mu}{2}}}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right),$$

so erhalten wir:

$$x^{\frac{\mu+1}{2}} \frac{d^{\frac{\mu}{2}}}{dx^{\frac{\mu}{2}}}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) + h \frac{d^{-\frac{\mu}{2}}}{dx^{-\frac{\mu}{2}}}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) = F(x)$$

und wird diese Gleichung mit 2^μ multiplicirt, und $\frac{\mu}{2}$ mal differentiirt, so kömmt man zu:

$$2^\mu \frac{d^{\frac{\mu}{2}}}{dx^{\frac{\mu}{2}}}\left[x^{\frac{\mu+1}{2}} \frac{d^{\frac{\mu}{2}}}{dx^{\frac{\mu}{2}}}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)\right] + 2^\mu \frac{hy}{\sqrt{x}} = 2^\mu \frac{d^{\frac{\mu}{2}} F(x)}{dx^{\frac{\mu}{2}}}$$

Durch Benützung der Formel (D) erhält man aber:

$$\frac{d^\mu y}{d(\sqrt{x})^\mu} + \frac{2^\mu h y}{\sqrt{x}} = 2^\mu \frac{d^{\frac{\mu}{2}} F(x)}{dx^{\frac{\mu}{2}}}$$

und wenn man:

$$\sqrt{x} = \xi$$

$$2^\mu \sqrt{x} \frac{d^{\frac{\mu}{2}} F(x)}{dx^{\frac{\mu}{2}}} = \varphi(\xi)$$

setzt:

$$\xi \frac{d^\mu y}{d\xi^\mu} + 2^\mu h y = \varphi(\xi),$$

welche Gleichung von einfacherer Form als die vorgelegte ist, und für ganze Werthe von μ leicht zu integriren ist.

Integration der Gleichung

$$x^{2m} y^{(m)} = \alpha^m y$$

für ganze und positive Werthe von m und beliebige Werthe der Constanten α.

Schon in unseren beiden früheren Memoiren war es uns gelungen, Gleichungen zu integriren, von denen specielle Fälle in der hier vorgelegten Gleichung enthalten waren; so ist namentlich das Integrale der Gleichung:

$$x^2 y' = \alpha y$$

$$y = A e^{-\frac{\alpha}{x}}$$

das Integrale der Gleichung:

$$x^4 y'' = \alpha^2 y,$$

welche als specieller Fall in der Riccati'schen enthalten ist:

$$y = x\left(A e^{-\frac{\alpha}{x}} + B e^{+\frac{\alpha}{x}}\right)$$

dann das Integrale der Gleichung:

$$x^6 y''' = \alpha^3 y,$$

welche als specieller Fall in der von uns integrirten $x^r y''' = \alpha^3 y$ enthalten ist:

$$y = x^2\left(A e^{-\frac{k\alpha}{x}} + B e^{-\frac{k^2\alpha}{x}} + C e^{-\frac{k^3\alpha}{x}}\right)$$

woselbst k eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit bedeutet.

Endlich fanden wir noch für die Gleichung:

$$x^8 y'''' = \alpha^4 y$$

folgendes Integral:

$$y = x^3\left(A e^{-\frac{\lambda\alpha}{x}} + B e^{-\frac{\lambda^2\alpha}{x}} + C e^{-\frac{\lambda^3\alpha}{x}} + D e^{-\frac{\lambda^4\alpha}{x}}\right)$$

woselbst λ eine imaginäre vierte Wurzel der Einheit ist.

Geleitet durch diese Wahrnehmungen, fanden wir uns veranlasst, das Integral der Gleichung:

$$x^{2m} y^{(m)} = \alpha^m y$$

in der Form:

$$y = x^{m-1} e^{-\frac{\mu\alpha}{x}}$$

vorauszusetzen, unter μ eine primitive m^{te} Wurzel der Einheit verstanden, und zu sehen, ob dieser Ausdruck wirklich ein, der Gleichung Genüge leistender Werth ist. Entwickeln wir denselben in eine Reihe, so erhalten wir:

$$y = x^{m-1} - \frac{\mu\,\alpha\,x^{m-2}}{1!} + \frac{\mu^2\,\alpha^2\,x^{m-3}}{2!} - \frac{\mu^3\,\alpha^3\,x^{m-4}}{3!} + \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{m-1}\frac{\mu^{m-1}\alpha^{m-1}}{(m-1)!} + (-1)^m\left\{\frac{\mu^m\,\alpha^m}{m!}\cdot\frac{1}{x} - \frac{\mu^{m+1}\alpha^{m+1}}{(m+1)!}\cdot\frac{1}{x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu^{m+2}\alpha^{m+2}}{(m+2)!}\cdot\frac{1}{x^3} - \ldots\right\}$$

und wird dies m mal differentiirt, und auf die Gleichungen:

$$\mu^m = 1\,;\ (-1)^{2m} = 1$$

$$\frac{d^m\left(\frac{1}{x^r}\right)}{dx^m} = (-1)^m\cdot\frac{(r+m-1)!}{(r-1)!}\cdot\frac{1}{x^{r+m}}$$

Rücksicht genommen, so findet man:

$$y^{(m)} = \frac{\alpha^m}{x^{m+1}} - \frac{\mu\alpha^{m+1}}{1!\,x^{m+2}} + \frac{\mu^2\,\alpha^{m+2}}{2!\,x^{m+3}} - \ldots$$

folglich ist:

$$x^{2m}\,y^{(m)} = \alpha^m\left\{x^{m-1} - \frac{\mu\,\alpha\,x^{m-2}}{1!} + \frac{\mu^2\,\alpha^2\,x^{m-3}}{2!} - \ldots\right\}$$

oder:

$$x^{2m}\,y^{(m)} = \alpha^m\,y$$

was nachzuweisen war. Es ist somit das Integrale dieser Gleichung:

$$y = x^{m-1}\left\{C_1\,e^{-\frac{\mu\alpha}{x}} + C_2\,e^{\frac{\mu^2\alpha}{x}} + C_3\,e^{-\frac{\mu^3\alpha}{x}} + \ldots + C_m\,e^{-\frac{\mu^m\alpha}{x}}\right\}$$

Entwickelung von $\frac{d^\mu\, e^{mx^2}}{dx^\mu}$ in Reihen.

Wir gehen aus von der Liouville'schen Formel:

$$(B)\qquad \frac{d^\mu y}{d(\sqrt{z})^\mu} = 2^\mu\sqrt{z}\,\frac{d^{\frac{\mu}{2}}\left[z^{\frac{\mu-1}{2}}\,\frac{d^{\frac{\mu}{2}}y}{dz^{\frac{\mu}{2}}}\right]}{dz^{\frac{\mu}{2}}}$$

und setzen in selbe:

$$y = e^{mz},$$

alsdann ist:

$$\frac{d^\mu e^{mz}}{d(\sqrt{z})^\mu} = 2^\mu \sqrt{z}\, m^{\frac{\mu}{2}} \frac{d^{\frac{\mu}{2}}}{dz^{\frac{\mu}{2}}} \left[z^{\frac{\mu-1}{2}} e^{mz}\right]$$

und diese geht für:

$$\sqrt{z} = x$$

über in:

$$\frac{d^\mu e^{mx^2}}{dx^\mu} = 2^\mu m^{\frac{\mu}{2}} x \frac{d^{\frac{\mu}{2}}}{dz^{\frac{\mu}{2}}} \left[z^{\frac{\mu-1}{2}} e^{mz}\right].$$

Man hat daher behufs der Entwickelung von $\frac{d^\mu e^{mx^2}}{dx^\mu}$ den $\frac{\mu}{2}^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von dem Producte $z^{\frac{\mu-1}{2}} e^{mz}$ zu bilden, alsdann hierein $z = x^2$ zu setzen, und das erhaltene Resultat mit $2^\mu m^{\frac{\mu}{2}} x$ zu multipliciren.

Nun erhält man:

$$\frac{d^{\frac{\mu}{2}}}{dz^{\frac{\mu}{2}}} \left[z^{\frac{\mu-1}{2}} e^{mz}\right] = m^{\frac{\mu}{2}} z^{\frac{\mu-1}{2}} e^{mz} \Big[1 + \frac{\mu(\mu-1)}{4mz} +$$

$$+ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2!(4mz)^2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)(\mu-5)}{3!(4mz)^3} + \ldots\Big]$$

wenn man in die bekannte Formel:

$$(12) \qquad \frac{d^r(PQ)}{dx^r} = P^{(r)} Q + \binom{r}{1} P^{(r-1)} Q' + \binom{r}{2} P^{(r-2)} Q'' + \ldots$$

die Substitutionen:

$$r = \frac{\mu}{2}$$

$$P = e^{mz}$$

$$Q = z^{\frac{\mu-1}{2}}$$

vollführt; man hat somit:

$$\frac{d^\mu e^{mx^2}}{dx^\mu} = (2mx)^\mu e^{mx^2}\Big[1 + \frac{\mu(\mu-1)}{4mx^2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2!(4mx^2)^2} + $$
$$+ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)(\mu-5)}{3!(4mx^2)^3} + \ldots\Big]$$

welche Reihe für jedes ganze und positive μ abbricht und für jedes andere μ zu einer divergenten, folglich unbrauchbaren Reihe führt.

Gleichwohl ist es leicht, auch für andere, als ganze und positive μ den μ^{ten} Differentialquotienten von e^{mx^2} in convergente Reihen zu entwickeln, und zwar wieder durch Benützung derselben Formel (12), nur setzen wir jetzt in dieselbe:

$$P = z^{\frac{\mu-1}{2}}$$
$$Q = e^{mz}.$$

Da aber die Rechnung weiters keine Schwierigkeiten darbietet, auch sonst für den Augenblick für uns von zu wenig Interesse ist, so unterlassen wir die Ausführung derselben.

Nun lässt sich auch leicht $\frac{d^\mu e^{mx^2+nx}}{dx^\mu}$ bestimmen, denn man hat identisch:

$$mx^2 + nx = m\left(x + \frac{n}{2m}\right)^2 - \frac{n^2}{4m}$$

und folglich:

$$\frac{d^\mu e^{mx^2+nx}}{dx^\mu} = e^{-\frac{n^2}{4m}} \frac{d^\mu e^{m\left(x+\frac{n}{2m}\right)^2}}{dx^\mu}$$

oder wenn man eine neue unabhängig Variable x_1 einführt, mittelst der Substitution:

$$x_1 = x + \frac{n}{2m},$$

so erhält man:

$$\frac{d^\mu e^{mx^2+nx}}{dx^\mu} = e^{-\frac{n^2}{4m}} \cdot \frac{d^\mu e^{mx_1^2}}{dx_1{}^\mu}$$

oder entwickelt:

$$\frac{d^\mu e^{mx^2+nx}}{dx^\mu} = (2mx_1)^\mu e^{mx_1^2-\frac{n^2}{4m}} \Big[1 + \frac{\mu(\mu-1)}{4mx_1^2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2!\,(4mx_1^2)^2} + $$
$$+ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)(\mu-5)}{3!\,(4mx_1^2)^3} + \ldots \Big]$$

und führt man hierein wieder statt x_1 seinen Werth, so erhält man:

$$\frac{d^\mu e^{mx^2+nx}}{dx^\mu} = (2mx+n)^\mu e^{mx^2+nx} \Big[1 + \frac{m\mu(\mu-1)}{(2mx+n)^2} + $$
$$+ \frac{m^2\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2!\,(2mx+n)^4} + $$
$$+ \frac{m^3\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)(\mu-5)}{3!\,(2mx+n)^6} + \ldots \Big]$$

was für ganze und positive Werthe von μ giltig ist.

Integration der linearen Differentialgleichung

$$(13) \qquad (m+x)\,y'' + [A + B - (\alpha+\beta)(m+x)]\,y' +$$
$$+ [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]\,y = 0$$

mittelst bestimmter Integrale.

Nach der Laplace'schen Methode (Lacroix Traité du calcul différentiel et du calcul intégral tom III, pag. 572), welche Prof. Petzval in seinem Werke: „Integration der linearen Differentialgleichungen" vervollständigte, ergibt sich für das Integrale der obigen Gleichung, unter Voraussetzung positiver, oder imaginärer Werthe von A und B mit positiven reellen Bestandtheilen folgender Ausdruck:

$$y = \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1}\, du.$$

Ich habe bei Gelegenheit des Studiums der Poisson'schen Arbeit „Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles" (Journal de l'école polytechnique[1]) tom XII) gefunden, und in meinem früheren Memoire auch mitgetheilt, dass in dem speciellen Falle, wo nebst der oben angegebenen Bedingung noch

---

[1]) S. Sitzb. d. mathem.-naturw. Cl. Bd. XXVI, Hft. , S. 476.

$$A + B = 1$$

ist, das zweite particuläre Integrale der Gleichung (13) in folgender Form erscheint:

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} \, log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] du.$$

In diesem Memoire will ich die Form des Integrales der Gleichung (13) in demjenigen Falle angeben, wo A und B positive Brüche sind, deren Summe eine ganze Zahl ist, oder aber, wo A und B imaginär sind, mit reellen Bestandtheilen, welche die eben genannten Eigenschaften besitzen; mit anderen Worten, ich will das Integrale der Gleichung (13) für den Fall angeben, wo

$$A = A_1 + a$$
$$B = B_1 + b$$

ist, unter a und b ganze positive Zahlen verstanden, wo ferner A_1 B_1 positive Zahlen, oder imaginäre, mit positiven reellen Bestandtheilen, deren Summe gleich 1 ist, bedeuten.

Ist also:

$$A_1 + B_1 = 1,$$

so hat man für das Integrale der Gleichung:

(14) $$(m+x)y'' + [A_1 + B_1 - (\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A_1\beta - B_1\alpha + \alpha\beta(m+x)]\, y = 0$$

folgender Ausdruck:

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A_1-1} (u-\beta)^{B_1-1} du +$$

$$+ C_2 \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A_1-1} (u-\beta)^{B_1-1} log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] du$$

den ich der Kürze halber mit:

(15) $$y = \varphi(x)$$

bezeichne.

Ich setze in (14) und (15):

$$y = e^{-\alpha x} z,$$

dadurch erhalte ich:

$$(16)\quad (m+x) z'' + [A_1 + B_1 + (\alpha - \beta)(m+x)] z' + A_1 (\alpha - \beta) z = 0$$

und ihr genügt:

$$z = e^{\alpha x} \varphi(x);$$

durch ein a maliges Differentiiren der Gleichung (16) erhält man:

$$(m+x) z^{(a+2)} + [a + A_1 + B_1 + (\alpha - \beta)(m+x)] z^{(a+1)} + \\ + (a + A_1)(\alpha - \beta) z^{(\alpha)} = 0$$

und ihr Integrale ist auch:

$$z = e^{-\alpha x} \varphi(x).$$

Setzt man nun:

$$z^{(a)} = V,$$

so erhält man:

$$(m+x) V'' + [a + A_1 + B_1 + (\alpha - \beta)(m+x)] V' + \\ + (a + A_1)(\alpha - \beta) V = 0$$

und für das Integrale derselben:

$$V = \frac{d^a}{dx^a} [e^{-\alpha x} \varphi(x)].$$

Setzt man endlich:

$$V = e^{-\alpha x} W,$$

so erhält man die Gleichung:

$$(17)\quad (m+x) W'' + [a + A_1 + B_1 - (\alpha + \beta)(m+x)] W' + \\ + [-\beta(a + A_1) - \alpha B_1 + \alpha\beta(m+x)] W = 0$$

der folgender Ausdruck genügt:

$$W = e^{\alpha x} \frac{d^a}{dx^a} [e^{-\alpha x} \varphi(x)],$$

woraus man deutlich den Einfluss sieht, den die Änderung von A_1 auf das Integrale ausübt.

Lässt man nun in (17) auch B_1 um b wachsen, unter b ebenfalls eine ganze positive Zahl verstanden, so hat man für das Integrale der Gleichung:

$$(18) \quad (m+x)y'' + [a + A_1 + b + B_1 - (\alpha+\beta)(m+x)]y' + \\ + [-\beta(a+A_1) - \alpha(b+B_1) + \alpha\beta(m+x)]y = 0$$

folgenden Werth:

$$(19) \qquad y = e^{\beta x} \frac{d^b}{dx^b} \left[e^{(\alpha-\beta)x} \frac{d^a}{dx^a} (e^{-\alpha x} \varphi(x)) \right]$$

und es lässt sich leicht nachweisen, dass dieser Ausdruck auch für beliebige Werthe von a und b stattfindet, nur dürfen die, bei den Differentiationen eingeführten Constanten nicht willkürlich sein, sondern müssen vielmehr so gewählt werden, dass der Gleichung (18) Genüge geleistet wird.

Bleibt man bei der Voraussetzung von ganzen und positiven Werthen von a und b stehen, so erhält man, wenn man in (19) statt φ (x) seinen Werth setzt:

$$y = C_1 e^{\beta x} \frac{d^b}{dx^b} \left[e^{(\alpha-\beta)x} \frac{d^a}{dx^a} \int_\alpha^\beta e^{um+x(u-\alpha)} (u-\alpha)^{A_1-1} (u-\beta)^{B_1-1} du \right] +$$

$$+ C_2 e^{\beta x} \frac{d^b}{dx^b} \left[e^{(\alpha-\beta)x} \frac{d^a}{dx^a} \int_\alpha^\beta e^{um+x(u-\alpha)} (u-\alpha)^{A_1-1} (u-\beta)^{B_1-1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \log[(u-\alpha)(u-\beta)] du \right] + C_2 e^{\beta x} \frac{d^b}{dx^b} \left\{ e^{(\alpha-\beta)x} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left[\log(m+x) \int_\alpha^\beta e^{um+x(u-\alpha)} (u-\alpha)^{A_1-1} (u-\beta)^{B_1-1} du \right] \right\}.$$

Die zwei ersten Theile dieses dreitheiligen Ausdruckes lassen sich sehr einfach entwickeln, sie nehmen nämlich successive folgende Formen an:

$$C_1\, e^{\beta x} \frac{d^b}{dx^b} \left[e^{(\alpha-\beta)x} \int_\alpha^\beta e^{um+x(u-\alpha)} (u-\alpha)^{a+A_1-1} (u-\beta)^{B_1-1}\, du \right] +$$

$$+ C_2\, e^{\beta x} \frac{d^b}{dx^b} \left[e^{(\alpha-\beta)x} \int_\alpha^\beta e^{um+x(u-\alpha)} (u-\alpha)^{a+A_1-1} (u-\beta)^{B_1-1}\,. \right.$$

$$\left. .\, log\, (u-\alpha)\, (u-\beta)\, du \right]$$

oder:

$$C_1\, e^{\beta x} \frac{d^b}{dx^b} \int_\alpha^\beta e^{um+x(u-\beta)} (u-\alpha)^{a+A_1-1} (u-\beta)^{B_1-1}\, du +$$

$$+ C_2\, e^{\beta x} \frac{d^b}{dx^b} \int_\alpha^\beta e^{um+x(u-\beta)} (u-\alpha)^{a+A_1-1} (u-\beta)^{B_1-1}\,.$$

$$.\, log\, (u-\alpha)\, (u-\beta)\, du$$

oder endlich:

$$C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{a+A_1-1} (u-\beta)^{b+B_1-1}\, du +$$

$$+ C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{a+A_1-1} (u-\beta)^{b+B_1-1}\, log\, (u-\alpha)\, (u-\beta)\, du$$

somit hat man für y folgenden Werth:

$$y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{a+A_1-1} (u-\beta)^{b+B_1-1} du +$$

$$+ C_2 \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{a+A_1-1} (u-\beta)^{b+B_1-1}\, log\, (u-\alpha)(u-\beta)\, du +$$

$$+ C_2\, e^{\beta x} \frac{d^b}{dx^b} \left\{ e^{(\alpha-\beta)x} \frac{d^a}{dx^a} \left[log\, (m+x) \int_\alpha^\beta e^{um+x(u-\alpha)} (u-\alpha)^{A_1-1}\,. \right.\right.$$

$$\left.\left. .\, (u-\beta)^{B_1-1}\, du \right] \right\}$$

und jetzt wollen wir uns mit der Entwickelung des 3. Theiles von y beschäftigen.

Es ist:

$$\frac{d^a}{dx^a}\left[log\,(m+x) \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{um+x(u-\alpha)}(u-\alpha)^{A_1-1}(u-\beta)^{B_1-1}\,du \right] =$$

$$log\,(m+x) \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{um+x(u-\alpha)}(u-\alpha)^{a+A_1-1}(u--\beta)^{B\,-1}\,du +$$

$$+ \binom{a}{1} \cdot \frac{1}{m+x} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{um+x(u-\alpha)}\,(u-\alpha)^{a+A_1-2}\,(u-\beta)^{B_1-1} du -$$

$$- \binom{a}{2} \cdot \frac{1\,!}{(m+x)^2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{um+x(u-\alpha)}(u-\alpha)^{a+A_1-3}(u-\beta)^{B_1-1} du +$$

$$+ \binom{a}{3} \cdot \frac{2\,!}{(m+x)^3} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{um+x(u-\alpha)}(u-\alpha)^{a+A_1-4}(u-\beta)^{B_1-1}\,du -$$

$$- \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

folglich:

$$e^{(\alpha-\beta)x}\,\frac{d^a}{dx^a}\left[log\,(m+x) \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{um+x(u-\alpha)}\,(u-\alpha)^{A_1-1}\,(u-\beta)^{B_1-1}\,du \right] =$$

$$log\,(m+x) \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{um+x(u-\beta)}(u-\alpha)^{a+A_1-1}(u-\beta)^{B_1-1}\,du +$$

$$+ \binom{a}{1} \cdot \frac{1}{m+x} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{um+x(u-\beta)}(u-\alpha)^{a+A_1-2}\,(u-\beta)^{B_1-1}\,du -$$

$$- \binom{a}{2} \cdot \frac{1\,!}{(m+x)^2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{um+x(u-\beta)}(u-\alpha)^{a+A_1-3}(u-\beta)^{B_1-1}\,du +$$

$$+ \binom{a}{3} \cdot \frac{2\,!}{(m+x)^3} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{um+x(u-\beta)}(u-\alpha)^{a+A_1-4}(u-\beta)^{B_1-1}\,du -$$

$$- \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und wenn man diese Gleichung b mal nach x differentiirt, dann mit $e^{\beta x}$ multiplicirt, ferner der Kürze halber folgende Bezeichnungsweise einführt:

$$(20) \qquad \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}\,(u-\alpha)^{a+A_1-r}\,(u-\beta)^{b+B_1-s}\,du = (r\,,\,s),$$

so hat man:

$$e^{\beta x}\frac{d^b}{dx^b}\left\{e^{(\alpha-\beta)x}\frac{d^a}{dx^a}\left[log(m+x)\int_\alpha^\beta e^{um+x(u-\alpha)}(u-\alpha)^{A_1-1}\,.\right.\right.$$

$$\left.\left..\,(u-\beta)^{B_1-1}\,du\right]\right\} = log(m+x)(11)+$$

$$\begin{array}{llll}
+\binom{b}{1}\cdot\frac{1}{m+x}(12) & -\binom{b}{2}\cdot\frac{1!}{(m+x)^2}(13) & +\binom{b}{3}\cdot\frac{2!}{(m+x)^3}(14)-\ldots \\
+\binom{a}{1}\cdot\frac{1}{m+x}(21) & -\binom{a}{1}\binom{b}{1}\cdot\frac{1!}{(m+x)^2}(22) & +\binom{a}{1}\binom{b}{2}\cdot\frac{2!}{(m+x)^3}(22)-\ldots \\
 & -\binom{a}{2}\cdot\frac{1!}{(m+x)^2}(31) & +\binom{a}{2}\binom{b}{1}\cdot\frac{2!}{(m+x)^3}(32)-\ldots \\
 & & +\quad\binom{a}{3}\cdot\frac{2!}{(m+x)^3}(41)-\ldots
\end{array}$$

Es ist somit das Integrale der Gleichung:

$$(m+x)y''+[A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y'+[-A\beta-B\alpha+$$
$$+\alpha\beta(m+x)]y=0$$

in dem Falle, wo:

$$A = A_1 + a$$
$$B = B_1 + b$$

ist, in welchen Gleichungen a und b ganze positive Zahlen bedeuten, und A_1 und B_1 positive Zahlen oder imaginäre, deren reeller Bestandtheil positiv ist, welche der Gleichung:

$$A_1 + B_1 = 1$$

genügen, Folgendes:

$$(21) \qquad y = C_1\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}\,(u-\alpha)^{A-1}\,(u-\beta)^{B-1}\,du+$$

$$+C_2\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]du+$$

$$+\frac{C_2}{m+x}\left[\binom{b}{1}(12)+\binom{a}{1}(21)\right]-$$

$$-C_2 \frac{1!}{(m+x)^2}\left[\binom{b}{2}(13)+\binom{a}{1}\binom{b}{1}(22)+\binom{a}{2}(31)\right]+$$

$$+C_2 \frac{2!}{(m+x)^3}\left[\binom{b}{3}(14)+\binom{b}{2}\binom{a}{1}(23)+\binom{b}{1}\binom{a}{2}(32)+\binom{a}{3}(41)\right]-\,..$$

wobei der Kürze halber:

$$(rs)=\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-r}(u-\beta)^{B-s}\,du$$

angenommen wurde.

Integration der linearen Differentialgleichung

(22) $(m+x)y''+[B-2\alpha(m+x)]y'+[A-B\alpha+\alpha^2(m+x)]y=0$

mittelst bestimmter Integrale.

Setzt man in dieselbe:

$$y=e^{\alpha x}z,$$

so erhält man:

$$(m+x)z''+Bz'+Az=0$$

und durch Einführung einer neuen unabhängig Variablen ξ mittelst der Substitution:

$$\xi^2=m+x$$

nimmt dieselbe die Form an:

(23) $$\xi\frac{d^2z}{d\xi^2}+(2B-1)\frac{dz}{d\xi}+4A\xi z=0.$$

Ihre Integration erfordert die Zerlegung folgenden Bruches:

$$\frac{(2B-1)u}{u^2+4A}$$

in Partialbrüche. Nun hat man:

$$\frac{(2B-1)u}{u^2+4A}=\frac{B-\frac{1}{2}}{u+2\sqrt{-A}}+\frac{B-\frac{1}{2}}{u-2\sqrt{-A}}$$

folglich wird die Gleichung (23) durch einen Ausdruck von der Form (21) genügt, so oft B eine ganze positive Zahl ist.

Um das Integrale der Gleichung (23) aufzustellen, hat man in (21) statt:

$$A \;,\; B \;,\; a \;,\; b \;,\; m \;,\; \alpha \;,\; \beta \;,\; x \;,\; y$$

der Reihe nach zu setzen:

$$B-\tfrac{1}{2} \;,\; B-\tfrac{1}{2} \;,\; B-1 \;,\; B-1 \;,\; 0 \;,\; -2\sqrt{-A} \;,\; 2\sqrt{-A} \;,\; \xi \;,\; z$$

somit ist:

$$z = C_1 \;.\int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\xi}(u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}}\,du +$$

$$+\; C_2 \;.\int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\xi}(u^2-4A)^{B-\frac{3}{2}} \log\left[\xi(u^2+4A)\right] du +$$

$$+\; \frac{C_2}{\xi}\left[\binom{B-1}{1}(12)+\binom{B-1}{1}(21)\right]-$$

$$-\; C_2 \cdot \frac{1\,!}{\xi^2}\left[\binom{B-1}{2}(13)+\binom{B-1}{1}\binom{B-1}{1}(22)+\binom{B-1}{2}(31)\right]+$$

$$+\; C_2 \cdot \frac{2\,!}{\xi^3}\left[\binom{B-1}{3}(14)+\binom{B-1}{2}\binom{B-1}{1}(23)+\binom{B-1}{1}\binom{B-1}{2}(32)+\right.$$
$$\left. +\binom{B-1}{3}(41)\right]\ldots.$$

und folglich hat man für das Integral der Gleichung (22) für den Fall, dass B eine ganze positive Zahl ist; folgenden Ausdruck:

$$y = C_1\, e^{\alpha x}\int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}}\,(u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}}\,du +$$

$$+\; C_2\, e^{\alpha x}\int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}}\,(u^2+4A)^{B-\frac{3}{2}} \log\left[(u^2+4A)\sqrt{m+x}\right] du +$$

$$+\; \frac{C_2}{\sqrt{m+x}}\, e^{\alpha x}\left[\binom{B-1}{1}(12)+\binom{B-1}{1}(21)\right]-$$

$$-\; C_2\, e^{\alpha x}.\frac{1\,!}{m+x}\left[\binom{B-1}{2}(13)+\binom{B-1}{1}\binom{B-1}{1}(22)+\binom{B-1}{2}(31)\right]+$$

$$+ C_2 e^{\alpha x} \cdot \frac{2\,!}{(m+x)^{\frac{3}{2}}} \left[\binom{B-1}{3} (14) + \binom{B-1}{2} \binom{B-1}{1} (23) + \right.$$

$$\left. + \binom{B-1}{1} \binom{B-1}{2} (32) + \binom{B-1}{3} (41) \right] - \ldots .$$

hiebei wird unter (rs) folgender Ausdruck verstanden:

$$(rs) = \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u + 2\sqrt{-A})^{B-\frac{1}{2}-r} (u - 2\sqrt{-A})^{B-\frac{1}{2}-s} du .$$

Integration partieller Differentialgleichungen.

Wir beginnen mit folgender, bei den Untersuchungen über die Ausbreitung des Schalls vorkommenden Gleichung:

$$\text{(24)} \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} \right)$$

deren Integration uns auf eine höchst einfache Weise gelang. Wir setzen:

$$\varphi = e^{\alpha t} f(u) \quad , \quad u = x^2 + y^2$$

und denken uns hierbei α als eine constante Zahl; alsdann ist:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \alpha^2 e^{\alpha t} f(u)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 2 e^{\alpha t} [f'(u) + 2x^2 f''(u)]$$

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} = 2 e^{\alpha t} [f'(u) + 2 y^2 f''(u)]$$

und substituirt man diese Werthe in (24) so erhält man:

$$\alpha^2 f(u) = 4 a^2 [f'(u) + u f''(u)]$$

oder in geordneter Form:

$$u f''(u) + f'(u) - \frac{\alpha^2}{4 a^2} f(u) = 0.$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$f(u) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{du^{\frac{1}{2}}} \left[A_\alpha e^{+\frac{\alpha}{a}\sqrt{u}} + B_\alpha e^{-\frac{\alpha}{a}\sqrt{u}} \right]$$

somit hat man:

$$\varphi = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{du^{\frac{1}{2}}}\left[A_\alpha e^{\alpha\left(t+\frac{\sqrt{u}}{a}\right)} + B_\alpha e^{\alpha\left(t-\frac{\sqrt{u}}{a}\right)}\right]$$

unter A_α und B_α willkürliche Constante verstanden, und da eine Summe solcher Ausdrücke, der linearen Form der vorgelegten Gleichung halber, ebenfalls genügt, so kann man auch:

$$\varphi = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{du^{\frac{1}{2}}}\left[\psi_1\left(t+\frac{\sqrt{u}}{a}\right) + \psi_2\left(t-\frac{\sqrt{u}}{a}\right)\right]$$

setzen, und dies ist das vollständige, mit 2 willkürlichen Functionen versehene Integrale der vorgelegten Gleichung [1]).

Um die willkürlichen Functionen zu bestimmen, ist erforderlich, dass man den initialen Zustand des Systemes kennt. Sei für:

$$t = 0\ ,\ \varphi = F_1(u)\ ,\ \frac{d\varphi}{dt} = F_2(u),$$

so hat man:

$$F_1(u) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{du^{\frac{1}{2}}}\left[\psi_1\left(\frac{\sqrt{u}}{a}\right) + \psi_2\left(-\frac{\sqrt{u}}{a}\right)\right] \tag{25}$$

und da:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{du^{\frac{1}{2}}}\left[\psi_1'\left(t+\frac{\sqrt{u}}{a}\right) + \psi_2'\left(t-\frac{\sqrt{u}}{a}\right)\right]$$

ist:

---

[1]) Die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx_1^{\,2}} + \frac{d^2\varphi}{dx_2^{\,2}} + \dots + \frac{d^2\varphi}{dx_n^{\,2}}\right)$$

gibt auf ähnliche Weise behandelt:

$$\varphi = \frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{du^{\frac{n-1}{2}}}\left[\psi_1\left(t+\frac{\sqrt{u}}{a}\right) + \psi_2\left(t-\frac{\sqrt{u}}{a}\right)\right]$$

woselbst:

$$u = x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \dots + x_n^{\,2}$$

ist.

$$(26) \qquad F_2(u) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{du^{\frac{1}{2}}}\left[\psi_1'\left(\frac{\sqrt{u}}{a}\right) + \psi_2'\left(-\frac{\sqrt{u}}{a}\right)\right]$$

Aus den beiden Gleichungen (25) und (26) folgen:

$$(27) \qquad \psi_1\left(\frac{\sqrt{u}}{a}\right) + \psi_2\left(-\frac{\sqrt{u}}{a}\right) = \frac{d^{-\frac{1}{2}} F_1(u)}{du^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\psi_1'\left(\frac{\sqrt{u}}{a}\right) + \psi_2'\left(-\frac{\sqrt{u}}{a}\right) = \frac{d^{-\frac{1}{2}} F_2(u)}{du^{-\frac{1}{2}}}$$

Nun ist:

$$\frac{d\psi_1\left(\frac{\sqrt{u}}{a}\right)}{du} = \frac{1}{2a\sqrt{u}}\,\psi_1'\left(\frac{\sqrt{u}}{a}\right)$$

folglich erhält man, wenn man die zweite der Gleichungen (27) mit $\frac{du}{2a\sqrt{u}}$ multiplicirt, und alsdann integrirt:

$$\psi_1\left(\frac{\sqrt{u}}{a}\right) - \psi_2\left(-\frac{\sqrt{u}}{a}\right) = \frac{1}{2a}\int \frac{d^{-\frac{1}{2}} F_2(u)}{du^{-\frac{1}{2}}}\,\frac{du}{\sqrt{u}}$$

und diese Gleichung mit der ersten, der Gleichungen (27) verknüpft, gibt:

$$\psi_1\left(\frac{\sqrt{u}}{a}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{d^{-\frac{1}{2}} F_1(u)}{du^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4a}\int \frac{d^{-\frac{1}{2}} F_2(u)}{du^{-\frac{1}{2}}}\,\frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$\psi_2\left(-\frac{\sqrt{u}}{a}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{d^{-\frac{1}{2}} F_1(u)}{du^{-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4a}\int \frac{d^{-\frac{1}{2}} F_2(u)}{du^{-\frac{1}{2}}}\,\frac{du}{\sqrt{u}}$$

welche Gleichungen die Form der willkürlichen Functionen ψ_1 und ψ_2 bestimmen.

Ganz auf dieselbe Weise lässt sich auch folgende Gleichung

$$a^2\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = (m+x)\,\frac{d^2\varphi}{dx^2} + n\,\frac{d\varphi}{dx}$$

integriren, in welcher a, m und n constante Zahlen sind, und zu welcher man kömmt, wenn man die Gesetze sucht, nach welchen die kleinen Schwingungen einer gleichmässig schweren homogenen Seite, die an einem Ende aufgehangen, am andern Ende belastet ist, vor sich gehen.

Setzt man nämlich:

$$\varphi = e^{\alpha t} f(x)$$

so erhält man:

$$(m+x)f''(x)+nf'(x)-a^2\alpha^2 f(x)=0,$$

deren Integrale folgendes ist:

$$f(x)=\frac{d^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-\frac{1}{2}}}\left[C_1\, e^{2a\alpha\sqrt{m+x}}+C_2\, e^{-2a\alpha\sqrt{m+x}}\right]$$

somit hat man:

$$\varphi=\frac{d^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-\frac{1}{2}}}\left[C_1\, e^{\alpha(t+2a\sqrt{m+x})}+C_2\, e^{\alpha(t-2a\sqrt{m+x})}\right]$$

unter C_1, C_2, α willkürliche Constanten verstanden. Hieraus ergibt sich leicht für das allgemeine Integrale folgender Werth:

$$\varphi=\frac{d^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-\frac{1}{2}}}\left[\psi_1(t+2a\sqrt{m+x})+\psi_2(t-2\,a\sqrt{m+x})\right]$$

in welchem ψ_1 und ψ_2 willkürliche Functionen bezeichnen, die sich aus den Bedingungen für den initialen Zustand genau so, wie bei dem früheren Probleme bestimmen lassen.

Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dt^2}=a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{\lambda}{x}\frac{du}{dx}+\frac{\mu}{x^2}u\right).$$

Mit dieser Gleichung in welcher a, μ, λ constante Zahlen bedeuten, beschäftigte sich Poisson im „Journal de l'école polytechnique tom. XII. pag. 215"; ihre Integration lässt sich leicht auf folgende Weise bewerkstelligen.

Setzt man:

$$u=e^{\alpha t}f(x),$$

so erhält man:

$$\alpha^2 f(x)=a^2\left[f''(x)+\frac{\lambda}{x}f'(x)+\frac{\mu}{x^2}f(x)\right]$$

und diese gibt geordnet:

$$x^2f''(x)+\lambda x f'(x)+\left(\mu-\frac{\alpha^2}{a^2}x^2\right)f(x)=0.$$

Setzt man hierein:

$$f(x)=x^k y$$

so erhält man, da:

$$f'(x) = x^k y' + k x^{k-1} y$$
$$f''(x) = x^k y'' + 2k x^{k-1} y' + k(k-1) x^{k-2} y$$

ist, folgende Gleichung:

$$x^2 y'' + (2k+\lambda) x y' + \left[k(k-1) + \lambda k + \mu - \frac{\alpha^2}{a^2} x^2\right] y = 0,$$

die sich vereinfacht, wenn man für k eine Wurzel der Gleichung:

$$k(k-1) + \lambda k + \mu = 0$$

wählt. Führt man dann für x eine neue unabhängig Variable w ein: mittelst der Gleichung:

$$x^2 = w,$$

so hat man, da:

$$y' = 2x \frac{dy}{dw}$$

$$y'' = 4x^2 \frac{d^2 y}{dw^2} + 2 \frac{dy}{dw}$$

ist, folgende Gleichung zur Bestimmung von y:

$$4w \frac{d^2 y}{dw^2} + 2(1+2k+\lambda) \frac{dy}{dw} - \frac{\alpha^2}{a^2} y = 0$$

und hieraus folgt:

$$y = \frac{d^{k+\frac{\lambda}{2}}}{dw^{k+\frac{\lambda}{2}}} \left[A e^{\frac{\alpha}{a}\sqrt{w}} + B e^{-\frac{\alpha}{a}\sqrt{w}}\right]$$

somit ist:

$$f(x) = x^k \frac{d^{k+\frac{\lambda}{2}}}{dw^{k+\frac{\lambda}{2}}} \left[A e^{\frac{\alpha}{a}\sqrt{w}} + B e^{-\frac{\alpha}{a}\sqrt{w}}\right]$$

erner:

$$u = x^k \frac{d^{k+\frac{\lambda}{2}}}{dw^{k+\frac{\lambda}{2}}} \left[A e^{\alpha\left(t+\frac{\sqrt{w}}{a}\right)} + B e^{\alpha\left(t-\frac{\sqrt{w}}{a}\right)}\right]$$

und endlich das allgemeine Integrale obiger Differentialgleichung:

$$u = x^k \frac{d^{k+\frac{\lambda}{2}}}{dw^{k+\frac{\lambda}{2}}} \left[\psi_1\left(t+\frac{\sqrt{w}}{a}\right)+\psi_2\left(t-\frac{\sqrt{w}}{a}\right)\right]$$

unter ψ_1 und ψ_2 aus den initialen Bedingungen leicht zu bestimmende willkürliche Functionen verstanden, unter w , k Grössen, die sich aus folgenden Gleichungen ergeben:

$$w = x^2$$

$$k(k-1) + \lambda k + \mu = 0.$$

Integration der partiellen Differentialgleichung

$$a^\mu \frac{d^\mu \varphi}{dt^\mu} = x^{\frac{\mu}{2}} \cdot \frac{d^\mu \varphi}{dx^\mu}$$

Setzt man:

$$\varphi = e^{\alpha t} f(x),$$

so erhält man zur Bestimmung von $f(x)$ folgende Gleichung:

$$(a\alpha)^\mu f(x) = x^{\frac{\mu}{2}} \cdot \frac{d^\mu f(x)}{dx^\mu}$$

deren Integration wir früher schon, nach Liouville durchführten. Man hat nämlich:

$$f(x) = \frac{d^{\frac{1-\mu}{2}} F(x)}{dx^{\frac{1-\mu}{2}}}$$

setzend:

$$(a\alpha)^\mu \frac{d^{\frac{1-\mu}{2}} F(x)}{dx^{\frac{1-\mu}{2}}} = x^{\frac{\mu}{2}} \cdot \frac{d^{\frac{1+\mu}{2}} F(x)}{dx^{\frac{1+\mu}{2}}}$$

und wenn man diese jetzt $\frac{\mu-1}{2}$ mal differentiirt:

$$(a\alpha)^\mu F(x) = \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}}}{dx^{\frac{\mu-1}{2}}} \left[x^{\frac{\mu}{2}} \cdot \frac{d^{\frac{\mu+1}{2}} F(x)}{dx^{\frac{\mu+1}{2}}}\right]$$

und durch Anwendung der Liouvill'schen Formel (A) vereinfacht:

$$(a\alpha)^{\mu} F(x) = \frac{1}{2^{\mu}} \frac{d^{\mu} F(x)}{d(\sqrt{x})^{\mu}}$$

Diese Gleichung hat particuläre Integrale von folgender Gestalt:

$$F(x) = e^{2a\alpha\sqrt[\mu]{1}\sqrt{x}}$$

somit ist:

$$f(x) = \frac{d^{\frac{1-\mu}{2}}}{dx^{\frac{1-\mu}{2}}} \left[e^{2a\alpha\sqrt[\mu]{1}\sqrt{x}} \right]$$

und

$$\varphi(x) = \frac{d^{\frac{1-\mu}{2}}}{dx^{\frac{1-\mu}{2}}} \left[e^{\alpha(t+2a\sqrt[\mu]{1}\sqrt{x}} \right]$$

und da α willkürlich ist, und eine Summe solcher Ausdrücke ebenfalls genügt, so hat man:

$$\varphi(x) = \frac{d^{\frac{1-\mu}{2}} \psi_1(t + 2ak_1\sqrt{x})}{dx^{\frac{1-\mu}{2}}} +$$

$$+ \frac{d^{\frac{1-\mu}{2}} \psi_2(t + 2ak_2\sqrt{x})}{dx^{\frac{1-\mu}{2}}} +$$

$$+ \dots\dots\dots$$

$$+ \frac{d^{\frac{1-\mu}{2}} \psi_n(t + 2ak_n\sqrt{x})}{dx^{\frac{1-\mu}{2}}} +$$

unter $\psi_1 \; \psi_2 \; \dots \; \psi_n$ willkürliche Functionen und unter $k_1 \; k_2 \; \dots \; k_n$ Wurzeln der Gleichung:

$$k^{\mu} = 1$$

verstanden.

Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{dt} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx_1{}^2} + \frac{d^2\varphi}{dx_2{}^2} + \ldots + \frac{d^2\varphi}{dx_n{}^2}\right).$$

Wir setzen:

$$\varphi = e^{\alpha^2 t} f(u)$$

woselbst:

$$u = x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2$$

ist, und erhalten:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \alpha^2 e^{\alpha^2 t} f(u);$$

ferner:

$$\frac{d^2\varphi}{dx_1{}^2} = 2\, e^{\alpha^2 t}\left[f'(u) + 2\, x_1{}^2 f''(u)\right]$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx_2{}^2} = 2\, e^{\alpha^2 t}\left[f'(u) + 2\, x_2{}^2 f''(u)\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx_n{}^2} = 2\, e^{\alpha^3 t}\left[f'(u) + 2\, x_n{}^2 f''(u)\right].$$

Werden diese Werthe in die vorgelegte Differentialgleichung substituirt, so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$u f''(u) + \frac{n}{2} f'(u) - \frac{\alpha^2}{4a^2} f(u) = 0$$

und folglich ist:

$$f(u) = \frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{du^{\frac{n-1}{2}}}\left[A_\alpha e^{\frac{\alpha}{a}\sqrt{u}} + B_\alpha e^{-\frac{\alpha}{a}\sqrt{u}}\right]$$

unter A_α und B_α willkürliche Constante verstanden. Es ist daher:

$$\varphi = \frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{du^{\frac{n-1}{2}}}\left[A_\alpha e^{\alpha^2 t + \frac{\alpha}{a}\sqrt{u}} + B_\alpha e^{\alpha^2 t - \frac{\alpha}{a}\sqrt{u}}\right].$$

Nun ist bekanntlich:

$$e^{\alpha^2 t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2 + 2\alpha w\sqrt{t}}\, dw$$

folglich:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{du^{\frac{n-1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2} \left\{ A_\alpha e^{\alpha(2w\sqrt{t}+\frac{\sqrt{u}}{a})} + B_\alpha e^{\alpha(2w\sqrt{t}-\frac{\sqrt{u}}{a})} \right\} dw$$

oder endlich

$$\varphi = \frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{du^{\frac{n-1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2} \left\{ \psi_1 (2w\sqrt{t} + \frac{\sqrt{u}}{a}) + \psi_2 (2w\sqrt{t} - \frac{\sqrt{u}}{a}) \right\} dw$$

unter ψ_1 und ψ_2 solche willkürliche Functionen verstanden, welche das Integrale zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ weder unbestimmt noch unendlich machen.

Anhang.

Bestimmung des Werthes folgenden unendlichen Kettenbruches:

$$x + \cfrac{1}{x+1+\cfrac{1}{x+2+\cfrac{1}{x+3+\ldots}}}$$

In den Zusätzen zu Legendre's Geometrie findet man als Werth desselben:

$$\frac{x\,\varphi(x)}{\varphi(x+1)}$$

wo:

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!\,x(x+1)} + \frac{1}{3!\,x(x+1)(x+2)} + \ldots$$

ist. Da nun $\varphi(x)$ auch folgendermassen geschrieben werden kann:

$$\varphi(x) = (x-1)!\left[\frac{1}{(x-1)!} + \frac{1}{1!\,x!} + \frac{1}{2!\,(x+1)!} + \frac{1}{3!\,(x+2)!} + \ldots\right]$$

so hat man als Werth des unendlichen Kettenbruches, den wir der Kürze halber mit $\psi(x)$ bezeichnen:

$$\psi(x) = \frac{\frac{1}{(x-1)!} + \frac{1}{1!x!} + \frac{1}{2!(x+1)!} + \frac{1}{3!(x+2)!} + \ldots}{\frac{1}{x!} + \frac{1}{1!(x+1)!} + \frac{1}{2!(x+2)!} + \frac{1}{3!(x+3)!} + \ldots}$$

Nun ist aber:

$$\frac{\sqrt{r}}{\pi}\int_0^\pi \cos w \, e^{2\sqrt{r}\cos w}\, dw = r + \frac{r^2}{1!2!} + \frac{r^3}{2!3!} + \frac{r^4}{3!4!} + \ldots$$

somit, wenn man beiderseits x mal differentiirt (unter x eine ganze positive Zahl verstanden):

$$\frac{1}{\pi}\frac{d^x}{dr^x}\left[\sqrt{r}\int_0^\pi \cos w \, e^{2\sqrt{r}\cos w}\, dw\right] = \frac{1}{(x-1)!} + \frac{r}{1!x!} + $$

$$+ \frac{r^2}{2!(x+1)!} + \frac{r^3}{3!(x+2)!} + \ldots$$

folglich ist:

$$x + \cfrac{1}{x+1+\cfrac{1}{x+2+\cfrac{1}{x+3+\ldots}}} = \frac{\frac{d^x}{dr^x}\left[\sqrt{r}\int_0^\pi \cos w . e^{2\sqrt{r}\cos w} dw\right]}{\frac{d^{x+1}}{dr^{x+1}}\left[\sqrt{r}\int_0^\pi \cos w . e^{2\sqrt{r}\cos w} dw\right]}$$

nur muss man noch, nach verrichteter Differentiation, $r = 1$ setzen.

Es erscheint also dieser unendliche Kettenbruch in der merkwürdigen Form eines Bruches, dessen Zähler und Nenner Differentialquotienten sind mit veränderlichem Differentiationsindexe.

Setzt man:

$$\frac{1}{(x-1)!} + \frac{1}{1!x!} + \frac{1}{2!(x+1)!} + \frac{1}{3!(x+2)!} + \ldots = f(x),$$

so ist:

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{f(x+1)}$$

Da aber auch, wie leicht einzusehen:

$$\psi(x) = x + \frac{1}{\psi(x+1)}$$

ist, so hat man, als nothwendige Folge dieser beiden letzten Gleichungen

$$f(x) = x f(x+1) + f(x+2)$$

oder, wenn man

$$f(x) = y$$
$$f(x+1) = y + \Delta y$$
$$f(x+2) = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$$

setzt, folgende Differenzengleichung:

(28) $$\Delta^2 y + (x+2)\Delta y + x y = 0,$$

deren Integrale:

$$y = A \frac{d^x}{dr^x}\left[\sqrt{r}\int_0^\pi \cos w\, e^{2\sqrt{r}\cos w}\, dw\right]$$

ist, wenn man unter A eine solche willkürliche periodische Function von x versteht, die, wenn x um 1 wächst, ungeändert bleibt, und r eine Zahl ist, die nach verrichteter, $x$maliger Differentiation durch 1 ersetzt werden muss.

Wir bemerken hierbei, dass die Gleichung (28) eine solche ist, die sich nach den bisher bekannten Integrationsmethoden nicht integriren lässt.

Integration der Differenzen-Gleichung

(29) $$(mx^2 + nx + p)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + (qx + r)\frac{\Delta y}{\Delta x} + sy = f(x).$$

Diese Gleichung lässt sich ganz so behandeln, wie Liouville mit der ähnlich gebauten Differentialgleichung verfuhr.

Macht man nämlich von folgenden 2 Formeln:

$$\Delta^r e^{mx} = e^{mx}(e^{m\Delta x} - 1)^r$$
$$\Delta^r(PQ) = P\Delta^r Q + \tbinom{r}{1}\Delta P[\Delta^{r-1}Q + \Delta^r Q] +$$
$$+ \tbinom{r}{2}\Delta^2 P[\Delta^{r-2}Q + 2\Delta^{r-1}Q + \Delta^r Q] + \ldots$$

(siehe Petzval's Werk I. Bd., pag. 117) Gebrauch, von denen die erste von Prof. Petzval als allgemein giltig vorausgesetzt, und die zweite von demselben als unmittelbare Folge hievon, abgeleitet wurde, so hat man $\Delta x = h$ setzend, und von der Gleichung (29) μ mal die endliche Differenz nehmend:

$$[mx^2+nx+p+\mu h(2mx+n+mh)+\mu(\mu-1)mh^2]\Delta^{\mu+2}y+$$
$$+h[\mu(2mx+n+mh)+2\mu(\mu-1)mh+qx+r+pqh]\Delta^{\mu+1}y+$$
$$+h^2[\mu(\mu-1)m+pq+s]\Delta^{\mu}y=h^2\Delta^{\mu}f(x).$$

Wählt man nun μ so, auf dass:

$$\mu(\mu-1)m+\mu q+s=0$$

wird, was, so lange nicht m und q gleich Null sind, angeht, und setzt man:

$$\Delta^{\mu+1}y=h^{\mu+1}z,$$

so erhält man eine Differenzen-Gleichung erster Ordnung, die somit leicht zu integriren ist.

Liouville gibt folgende merkwürdige Formel:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}\left(e^{x}\int e^{-x}y\,dx\right)}{dx^{\frac{1}{2}}}=e^{x}\int e^{-x}\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}dx$$

an, deren Richtigkeit sich dadurch darthun lässt, dass man in selbe $y=S[A_m e^{mx}]$ setzt; wir fanden folgende viel allgemeinere Formeln:

$$\Delta^m[e^{rx}\Delta^n(e^{-rx}y)]=e^{rx}\Delta^n(e^{-rx}\Delta^m y)$$

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[e^{rx}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-rx}y)\right]=e^{rx}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-rx}\frac{d^m y}{dx^m}\right)$$

unter m, r, n beliebige Constante verstanden, deren Richtigkeit genau so, wie bei der speciellen von Liouville herrührende Formel dargethan werden kann.

Und nun schliessen wir, mit derselben Bemerkung mit der wir unser erstes Memoire geschlossen. Da wir nämlich die Function complémentaire in der Regel ausser Acht liessen, so bleibt uns zur Verificirung der gewonnenen Integrale, nichts anderes übrig, als eine directe Substitution in die vorgelegte Gleichung.
